Figure 1. Réacteur semi-batch isotherme.

Figure 2. Système commandé en rétroaction.
Figure 3. Réponse du système thermique à \( u(t) = 4e(t) \).

Figure 4. Système commandé en rétroaction et par compensation de perturbation.
Problème 1 (Modélisation 1 point)

Soit le réacteur semi-batch isotherme de la figure 1, dans lequel a lieu la réaction \( A + B \rightarrow C \) avec la vitesse de réaction \( r(t) = kc_A(t)c_B(t) \). L'alimentation est caractérisée par le débit volumique \( q_B(t) \) et la concentration constante \( c_{B,in} \). Les conditions initiales sont \( V_0, c_{A0}, c_{B0} = c_0 = 0 \).

a) Écrire les bilans de matière pour ce réacteur.

b) Quel est le nombre minimal de variables d'état (expliquer) ?

c) Dessiner qualitativement le comportement temporel des variables d'état \( V(t) \) et \( c_A(t) \). Existe-t-il un état stationnaire ? Si oui, calculer le.

d) Exprimer la concentration \( c_c(t) \) à partir des variables d'état \( V(t) \) et \( c_A(t) \).

Réponses :

\[
\begin{align*}
\dot{V} &= q_B \\
\dot{c}_A &= -\frac{q_B}{V} c_A - \frac{V}{V} c_B \\
\dot{c}_B &= -\frac{q_B}{V} \left[ c_{B,in} - c_B \right] - \frac{V}{V} c_A c_B \\
\dot{c}_C &= -\frac{q_B}{V} c_C + \frac{V}{V} c_A c_B \\
V(0) &= V_0 \\
c_A(0) &= c_{A0} \\
c_B(0) &= 0 \\
c_C(0) &= 0
\end{align*}
\]

b) Nombre minimal de variables d'état = \( R + p = 2 \)

\( R = 1 \) : nombre de réactions

\( p = 1 \) : nombre de débits indépendants

\[ V(t) c_c(t) - V_0 c_A(0) = -\left[ V(t) c_A(t) - V_0 c_{A0} \right] \]

\[ c_c(t) = \frac{V_0 c_{A0}}{V(t)} - c_A(t) \]

(Si nécessaire, continuez au verso)
**Problème 2** (Système commandé 1 point)

Soit le système commandé de la figure 2 avec le procédé donné par

$$
\begin{align*}
    x(t) &= -4x(t) + [2x(t) + 1]u(t) \quad x(0) = 0.5 \\
    y(t) &= 2x(t - 1) + u(t - 1)
\end{align*}
$$

a) Linéariser ce système pour le point de fonctionnement correspondant à $u = 1$.

b) Calculer la fonction de transfert correspondante $G_p(s)$.

c) Exprimer $G_p(s)$ sous la forme d'une fraction rationnelle en utilisant une approximation de Padé de premier ordre pour le retard pur.

d) Ce procédé est commandé par un régulateur proportionnel. Pour quel domaine du gain $K_R$ ce système commandé sera-t-il stable ?

**Réponses :**

\[ a \quad c \quad s \quad s \]

\[ 0 = -4x + [2x + 1]u \quad \Rightarrow \quad x = 0.5 \]

\[ y = 4 + 2u \]

Linéariser : \[ A = -4 + 2u \quad x = -2 \]

\[ B = 2x + 1 \quad y = 2 \]

\[ \Rightarrow \]

\[ x(t) = -2x + 2u \quad x(0) = 0.5 - 0.5 = 0 \]

\[ y(t) = 2x(t-1) + u(t-1) \]

\[ b) \]

\[ \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{2}{s+2} \]

\[ Y(s) = [2x(s) + u(s)]e^{-s} = \frac{2}{s+2}e^{-s}U(s) \]

\[ G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+6}{s+2}e^{-s} \]

c) Padé : \[ e^{-s} = \frac{1}{s} \]

\[ G_p(s) \sim \frac{(s+6)(s-2)}{(s+2)(s+2)} = \frac{-(s+6)(s-2)}{(s+2)^2} \]

d) Éq. caractéristique : \[ 1 + G_RG_p = 0 = 1 - K_R\frac{(s+6)(s-2)}{(s+2)^2} \]

\[ (Si \ nécessaire, \ continuez \ au \ verso) \]

\[ \text{Cond. N\&C :} \]

\[ 1 - K_R > 0 \quad K_R < 1 \]

\[ 1 + 3K_R > 0 \quad K_R > -\frac{1}{3} \]

\[ \text{stable} \quad \text{G} \]

\[ \text{stable} \quad K_R \]

\[ \text{stable} \quad \frac{1}{3} \]

\[ -1/3 \]
Problème 3 (Systèmes linéaires 1 point)

a) Calculer la transformée de Laplace du signal

\[ u(t) = \begin{cases} 
  t & \text{pour } 0 \leq t < 1 \\
  1 & \text{pour } 1 \leq t < 2 \\
  e^{-2(t-2)} & \text{pour } t \geq 2 
\end{cases} \]

b) Calculer le signal temporel dont la transformée de Laplace est \( Y(s) = \frac{5(s+1)(s+3)}{(s+2)^3} \)

c) Question bonus (0.25 point) : Pour \( G(s) = \frac{A}{s-p} \), quelle condition faut-il avoir sur le pôle \( p \) pour que la réponse indicelle soit bornée ?

Réponses :

\[ u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \]

\[ u_1(t) = t \delta(t) \]

\[ u_2(t) = -(t-1) \delta(t-1) \]

\[ u_3(t) = \left[ e^{-2(t-2)} - 1 \right] \delta(t-2) \]

\[ U(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{4}{s^2} e^{-5s} + \left[ \frac{4}{s+2} - \frac{4}{s} \right] e^{-2s} = \frac{1}{s^2} \left[ 1 - e^{-5s} - \frac{2 e^{-2s}}{s(s+2)} \right] \]

b) \( Y(s) = s - \frac{5}{(s+2)^2} \) \( \rightarrow \) \( y(t) = 5 \delta(t) - 5t e^{-2t} \delta(t) \)

c) \( G(s) = \frac{A}{s-p} \) \( U(s) = \frac{1}{s} \)

\[ Y(s) = G(s) U(s) = \frac{A}{s(s-p)} = \frac{s+1}{s} + \frac{p}{s-p} \rightarrow y(t) = \left( (t+1) e^{pt} \right) \delta(t) \]

\[ y(0) = \frac{A}{s^2} \rightarrow y(t) = At e^{pt} \]

Pour que la réponse reste bornée \( \square p < 0 \)

(Si nécessaire, continuez au verso)
Problème 4 (Régulateur PID 1 point)

La réponse d'un système à l'excitation $u(t) = 4\delta(t)$ est donnée à la figure 3.

a) Sachant que le système ne possède pas de zéro, déterminer sa fonction de transfert.

b) Mettre au point un régulateur PID de telle façon que la fonction de transfert du système bouclé soit $G_{BF}(s) = \frac{1}{4s+1}$.

Réponses :

a) $t_p = 15$ min

$K_A = 10$, $K = 4$

$$\frac{K}{\zeta^2s^2 + 2\zeta s + 1} = \frac{2.5}{20.6s^2 + 2.8s + 1}$$

b) $G_2 = \frac{G_{BF}}{G[1 - G_{BF}]} = \frac{1}{G\frac{s}{\zeta s + 1}} = \frac{20.6s^2 + 2.8s + 1}{2.5 \times 4s}$

PID : $K_2 \left[ \frac{\zeta^2 s^2 + \zeta s + 1}{\zeta s} \right] = \frac{\frac{\zeta^2 s^2 + \zeta s + 1}{\zeta s}}{K_2} s$

$\frac{\zeta}{K_2} = 10$

$\tau_I = 20.6$

$\tau_I = 2.8$

(Si nécessaire, continuez au verso)
Problème 5 (Comande feedforward 1 point)

Soit le système commandé de la figure 4 avec les fonctions de transfert

\[ G_P(s) = \frac{5e^{-2s}}{(10s+1)(s+1)} \quad \text{et} \quad G_L(s) = \frac{-2e^{-2s}}{5s+1} \]

a) Calculer la fonction de transfert \( G_{FF}(s) \) du régulateur feedforward.

b) Ce régulateur est-il physiquement réalisable (causal) ? Justifier. Sinon, proposer une approximation qui soit causale.

c) Proposer une relation dynamique temporelle entre la mesure \( d(t) \) et la composante de l'entrée \( u_{ff}(t) \).

d) Ecrire cette loi de commande sous forme numérique pour \( T=0,1 \).

e) Question bonus (0.25 point) : Le choix de ce régulateur feedforward influence-t-il la stabilité du système commandé (justifier) ?

Réponses :

\( a )\)

\[ G_{FF}(s) = -\frac{G_L(s)}{G_P(s)} = \frac{0.4(10s+1)(s+1)}{5s+1} \]

\( b )\)

\[ G_{FF}(s) \text{ est non causal, } n = 1, \quad m = 2 \]

Approximation causale en multipliant le zéro à -1

\[ G_{FF}(s) \approx \frac{0.4(10s+1)}{5s+1} \]

\( c )\)

\[ \frac{u_{ff}(s)}{d(s)} = \frac{4s + 0.4}{5s + 1} \rightarrow 5u_{ff}(t) + u_{ff}(t) = 4d(t) + 0.4d(t) \]

\( d )\)

\[ u_{ff}(t+hT) \approx \frac{u_{ff}(d(t+hT)) - u_{ff}(d(t))}{T} \quad \text{et} \quad d(t+hT) \approx \frac{d(\Delta t+1) - d(\Delta t)}{T} \]

\[ \rightarrow 5 \frac{u_{ff}(d(t+hT)) - u_{ff}(d(t))}{T} + u_{ff}(d(t)) = 4 \frac{d(\Delta t+1) - d(\Delta t)}{T} + 0.4d(\Delta t) \]

\[ u_{ff}(d(t+hT)) = \left(1 - \frac{T}{5}\right)u_{ff}(d(t)) + 0.8d(d(t+hT)) - 0.8\left[1 - \frac{T}{10}\right]d(\Delta t) \]

Pour \( T = 0.1 \):

\[ u_{ff}(d(t+hT)) = 0.48u_{ff}(d(t)) + 0.8d(d(t+hT)) - 0.792d(\Delta t) \]

\( e )\)

\( G_{FF}(s) \) n'influence pas l'équation caractéristique, pas d'influence sur la stabilité.

(Si nécessaire, continuez au verso)