

## Part I exam

1. **(20 points)** A distillation column in a refinery transforms the incoming crude oil into the following fractions: kerosene ( $x$ ), gasoline ( $y$ ), and asphalt ( $z$ ). Depending on the relative content of light ( $b_1$ ), middle ( $b_2$ ) and heavy ( $b_3$ ) hydrocarbons, the column produces variable amounts of  $x, y$  and  $z$  according to the following system of linear equations:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- a. Assuming that the refinery is processing thousands different types of crude oils (such as Brent crude, West Texas Intermediate, Abadan Crude, etc.) that have varying relative content of hydrocarbons (i.e. varying  $b_1, b_2$ , and  $b_3$ ) propose a method that should be used to compute the expected amounts of kerosene, gasoline and asphalt from all types of crude oil.
- b. Use the proposed method to compute  $x, y$  and  $z$  for two types of crude oil:

$$\text{Brent: } \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix} \quad \text{and Abadan: } \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

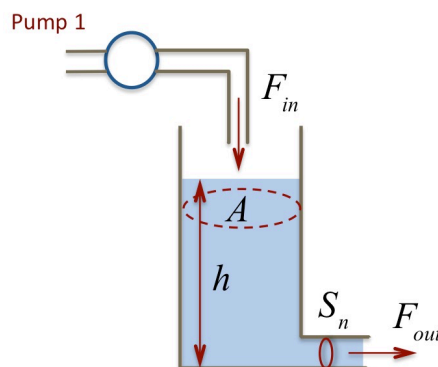
2. **(25 points)** The level of liquid,  $h$ , in the reactor shown below evolves according to the following equation:

$$A \frac{dh}{dt} = F_{in}(t) - S_n \sqrt{2gh(t)}$$

where the cross sections are  $A=0.00154 \text{ m}^2$  and  $S_n=0.00005 \text{ m}^2$ , and  $g=9.81 \text{ m/s}^2$ . For the measured values of  $h$ :

Time (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Level (m)	1.000	1.220	1.232	1.059	0.937	0.872	0.841	0.827	0.821	0.818	0.817

- a. Compute  $dh/dt$  using the central differences method whenever possible, otherwise use the forward differences or the backward differences.
- b. Compute the values of  $F_{in}(t)$ .
- c. Compute the overall volume of the liquid that was pumped into the reactor over the observed period. Use the appropriate composite Simpson rule.



Student name:

Sciper no:

3. **(25 points)** The predator-prey model depicts the interaction of two species in an ecosystem. Consider the interaction between gnus and lions in a closed system. The system of ODEs describing the evolution of the gnu population,  $G$ , and the lion population,  $L$ , is given by:

$$\frac{dG}{dt} = 0.7G - 0.007GL$$

$$\frac{dL}{dt} = 0.0021GL - 0.5L$$

and

$$x(0) = \begin{bmatrix} G(0) \\ L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 50 \end{bmatrix}$$

- Formulate the equations for the Euler Backward scheme to solve this system and explain conceptually the procedure of solving the system. In the equations, the known quantities should be replaced by their actual values in all utilized expressions.
  - For the given initial condition compute  $x(1)$ , if the time step,  $h$ , is equal to  $1/104$ . For the calculations, if an iterative method is used, propose and use the fastest converging one in three iterations.
  - Which explicit method would you recommend and for which type of the ODEs it would be applicable? When would you apply an implicit method and which one? Explain why.
4. **(4 points)** Write a piece of code to find the index (iZero) of the first zero element of a general numerical array A:
- Use only **while** loop for this task (you are not allowed to use **if** or **for**).
  - Use logical indexing.
5. **(6 points)** You are given a system of ordinary differential equations by:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 t - 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 10x_1 + 5$$

To simulate the system in the time interval  $t = [0,10]$  with the initial conditions  $x_1 = 1$  and  $x_2 = 0$  you have the following lines of code:

```
1. tspan = [0,10];
2. [t,x] = ode45(f,tspan);
```

- If we assume the function **f** is in your workspace, can you execute the code above? Are there any inputs missing?
  - Write a code for the function **f**.
6. **(10 points)** Match each of the following MATLAB error messages with one of the cases given below:

**Error messages:**

- Attempted to access A(0,3); index must be a positive integer or logical.
- Error using / Matrix dimensions must agree.
- Expression or statement is incorrect--possibly unbalanced (, {, or [.
- Attempted to access A(:,4); index out of bounds because size(A)=[4,3].

Student name:

Sciper no:

5. The expression to the left of the equals sign is not a valid target for an assignment.

**Cases:**

- a. `A=[1 5 6;3 8 4;0 9 2; 1 3 0];`  
`for i=1:size(A,1)`  
`B(i)=1/sum(A(:,i));`  
`end`
- b. `v=[1 5 2 7];`  
`inv=1/v;`
- c. `A=[6 7 3;5 7 8;9 10 4;0 2 1 ];`  
`for j=1:size(A,1)-1`  
`B(j)=A(j,3)-A(j-1,3)`  
`end`
- d. `a = 3;`  
`x=[0,1];`  
`F = Myfunction(a,x) % F is a scalar computed with a defined function 'Myfunction'`  
`if F = 0.5`  
`y=F/3;`  
`end`
- e. `X=[4 5 6 2 0 7 1];`  
`sum(x(x>3));`

7. **(10 points)** The following MATLAB function realizes different operations depending on the input and output arguments.

**\***

```
switch nargin
case 1
    A=x^2;
case 2
    A=x+y;
case 3
    if nargin == 1
        A= mod(x+y,z);
    elseif nargin == 2
        A = x+y;
        if mod(x+y,z)==0
            B=1;
        else
            B=0;
        end
    else
        fprintf('Wrong number of outputs');
    end
otherwise
    fprintf('Wrong number of inputs');
end
```

- a) Write the first line of the function (where the **\*** appears).
- b) Write the command line to call the function so that it returns the sum of a=1 and b=3.
- c) Write the command line to call the function so that it calculates the sum of a=2 and b=5, and checks whether or not this sum can be divided by c=5 with rest zero.

## Part I exam

1. **(20 points)** Une colonne de distillation d'une raffinerie transforme le pétrole brut qui y entre en proportions suivantes: kérosène ( $x$ ), essence ( $y$ ) et bitume ( $z$ ). Selon les concentrations relatives d'hydrocarbures légers ( $b_1$ ), moyens ( $b_2$ ) et lourds ( $b_3$ ), la colonne produit des quantités variables de  $x, y$  et  $z$  selon le système d'équations linéaire suivant:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 14 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- a. En supposant que la raffinerie traite des milliers de différents types de pétrole brut (tel que Brent Crude, West Texas Intermediate, Abadan Crude, etc) qui ont des contenus relatifs d'hydrocarbures variables (c.-à-d. des différents  $b_1, b_2$ , et  $b_3$ ), proposez une méthode qui devrait être utilisée pour calculer les quantités attendues de kérosène, essence et bitume pour n'importe quel type de pétrole brut.

- b. Utilisez la méthode proposée pour calculer  $x, y$  et  $z$  pour deux types de pétrole brut :

Brent:  $\begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 12 \end{bmatrix}$  et Abadan:  $\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix}$

2. **(25 points)** Le niveau de liquide  $h$  du réacteur dessiné ci-dessous évolue selon l'équation suivante :

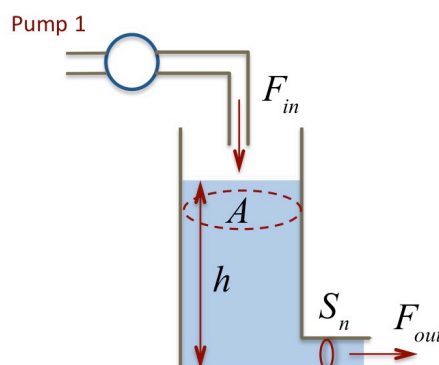
$$A \frac{dh}{dt} = F_{in}(t) - S_n \sqrt{2gh(t)}$$

où les aires de section transversale sont  $A=0.00154 \text{ m}^2$  et  $S_n=0.00005 \text{ m}^2$ , et  $g=9.81 \text{ m/s}^2$ .

Pour les valeurs mesurées de  $h$ :

Time (s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Level (m)	1.000	1.220	1.232	1.059	0.937	0.872	0.841	0.827	0.821	0.818	0.817

- a. Calculez  $dh/dt$  en utilisant la méthode des différences centrées lorsque c'est possible, et sinon les différences avant ou arrière.
- b. Calculez les valeurs de  $F_{in}(t)$ .
- c. Calculez le volume global qui a été pompé dans le réacteur sur la période d'observation. Utilisez la méthode de Simpson composite qui convient.



Student name:

Sciper no:

3. **(25 points)** Le système de proie-prédateur décrit l'interaction de deux espèces dans un écosystème. Considérez l'interaction entre des gnous et des lions dans un système fermé. Le système d'équations différentielles ordinaires (ODE) décrivant l'évolution de la population de gnous,  $G$ , et de lions,  $L$ , est donné par:

$$\frac{dG}{dt} = 0.7G - 0.007GL$$

$$\frac{dL}{dt} = 0.0021GL - 0.5L$$

et

$$x(0) = \begin{bmatrix} G(0) \\ L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 50 \end{bmatrix}$$

- Formulez les équations de la méthode « Euler Backward » pour résoudre ce système et expliquez conceptuellement la procédure de résolution. Dans les équations, les quantités connues doivent être remplacées par leurs valeurs réelles dans toutes les expressions.
  - Pour la condition initiale donnée, calculez  $x(1)$  pour un pas d'intégration  $h$  égal à  $1/104$ . Dans les calculs, si une méthode itérative est utilisée, proposez et utilisez celle qui converge le plus rapidement, en trois itérations.
  - Quelle méthode explicite recommanderiez-vous, et pour quel type d'équations différentielles ordinaires (ODE) serait-elle applicable? Dans quel cas appliqueriez-vous une méthode implicite, et laquelle? Expliquez pourquoi.
4. **(4 points)** Écrivez un code pour trouver l'indice (`iZero`) du premier élément nul d'un tableau de nombre :
- Utilisez uniquement une boucle **while** pour le faire (n'utilisez pas **if** ou **for**).
  - Utilisez le référencement logique (logical indexing).
5. **(6 points)** Afin de résoudre le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1 t - 2x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 10x_1 + 5$$

dans l'intervalle de temps  $t = [0,10]$  avec les conditions initiales  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 0$ , les lignes de code suivantes vous sont données:

```
1. tspan = [0,10];
2. [t,x] = ode45(f,tspan);
```

- Si l'on suppose que la fonction **f** est dans votre environnement de travail (`workspace`), pouvez vous exécuter le code ci-dessous ? Y a-t-il des arguments (inputs) manquants?
  - Écrivez un code pour la fonction **f**.
6. **(10 points)** Faites correspondre chaque message d'erreur MATLAB à l'un des cas ci-dessous :

**Error messages:**

- Attempted to access `A(0,3)`; index must be a positive integer or logical.
- Error using `/` Matrix dimensions must agree.
- Expression or statement is incorrect--possibly unbalanced (`,` `{`, or `[`.
- Attempted to access `A(:,4)`; index out of bounds because `size(A)=[4,3]`.

Student name:

Sciper no:

5. The expression to the left of the equals sign is not a valid target for an assignment.

**Cases:**

- a. `A=[1 5 6;3 8 4;0 9 2; 1 3 0];`  
`for i=1:size(A,1)`  
`B(i)=1/sum(A(:,i));`  
`end`
- b. `v=[1 5 2 7];`  
`inv=1/v;`
- c. `A=[6 7 3;5 7 8;9 10 4;0 2 1 ];`  
`for j=1:size(A,1)-1`  
`B(j)=A(j,3)-A(j-1,3)`  
`end`
- d. `a = 3;`  
`x=[0,1];`  
`F = Myfunction(a,x) % F is a scalar computed with a defined function 'Myfunction'`  
`if F = 0.5`  
`y=F/3;`  
`end`
- e. `X=[4 5 6 2 0 7 1];`  
`sum(x(x>3));`

7. **(10 points)** La fonction MATLAB suivante effectue différentes opérations selon les arguments d'entrée et de sortie (input and output arguments).

**\***

```
switch nargin
case 1
    A=x^2;
case 2
    A=x+y;
case 3
    if nargin == 1
        A= mod(x+y,z);
    elseif nargin == 2
        A = x+y;
        if mod(x+y,z)==0
            B=1;
        else
            B=0;
        end
    else
        fprintf('Wrong number of outputs');
    end
otherwise
    fprintf('Wrong number of inputs');
end
```

- a) Écrivez la première ligne de la fonction (où le symbole \* se trouve).
- b) Écrivez une ligne de commande qui appelle la fonction de manière à calculer la somme de a=1 et b=3.
- c) Écrivez une ligne de commande qui appelle la fonction de manière à ce qu'elle calcule la somme de a=2 et b=5 et vérifie si la somme peut être divisée par c=5 avec un reste nul.

Student name:

Sciper no: